

Title	独立確率変数の収斂
Author(s)	あつち, まさひこ
Citation	全国紙上数学談話会. 2(15) p.520-p.522
Issue Date	1949-07-20
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75292
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

157. 独立確率変数の収斂

北大、あつち まさひこ

1949.2.18

以下に取扱う(実)確率変数 x_1, x_2, \dots は互に独立で

$$P(|x_i| \leq K) = 1, \quad i = 1, 2, \dots$$

且つ一般性を失うことなく各々の平均値は 0 としておく.

【定理 1】 確率変数 x_1, x_2, \dots に於て

$$E_i = E(x_i \geq \delta), \quad \delta > 0$$

とすれば

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = 0.$$

【証明】 $P(\bigcap E_i) > 0$ と仮定する

$$P(\bigcap E_i) = \prod P(E_i)$$

従つて任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$P(E_i) > 1 - \varepsilon, \quad i > N$$

$$\begin{aligned} \mu(x_i) &= \int x_i P(d\omega) \\ &= \int_{E_i} x_i P(d\omega) + \int_{\Omega - E_i} x_i P(d\omega) \\ &\geq \delta \cdot P(E_i) - K P(\Omega - E_i) \\ &\geq \delta(1 - \varepsilon) - K\varepsilon \\ &= \delta - (\delta + K)\varepsilon. \end{aligned}$$

ε は任意だったから

$$> 0 \quad i > N.$$

と出来る.

これは $\mu(x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots$ なる仮定に反する.

【注意】 上の証明と同様にすれば

$$E_i = E(x_i \leq -\delta), \quad \delta > 0$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = 0.$$

[定理 1] X_1, X_2, \dots が X に 概収斂すれば
 $P(X=0)=1$

[証明]

$$E_{\kappa'} \equiv \bigcup_{p=1}^{\infty} \bigcap_{n=p}^{\infty} E(X_n > \frac{1}{\kappa})$$

$$E_{\kappa} \equiv (X > \frac{1}{\kappa})$$

$$E_{\kappa}'' = E_{\kappa} - E_{\kappa} \cap E_{\kappa'}$$

$$\omega \in E_{\kappa}''$$

とすれば $X_{\kappa}(\omega) \leq \frac{1}{\kappa}$ とする κ が無数にある。

$$\text{又} \quad X(\omega) > \frac{1}{\kappa}.$$

従って $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots$ は $X(\omega)$ に収斂しない。

即ち

$$P(E^-) = 0$$

$$P(E_{\kappa}) = P(E_{\kappa} \cap E_{\kappa'})$$

$$P(E_{\kappa'}) \geq P(E_{\kappa} \cap E_{\kappa'}) = P(E_{\kappa})$$

[定理 1] より

$$P(\bigcap_{n=1}^{\infty} E(X_n > \frac{1}{n})) = 0$$

$$P(E_{\kappa'}) = 0$$

$$P(E_{\kappa}) = 0$$

$$P(\bigcup_{\kappa=1}^{\infty} E_{\kappa}) = P(X > 0) = 0$$

同様に

$$P(X < 0) = 0$$

[定理 3] X_1, X_2, \dots が X に確率収斂すれば概収斂して

$$P(X=0)=1$$

[証明] X_1, X_2, \dots の適当な部分列は X に概収斂し

従て [定理 2] より

$$P(E) \equiv P(X \neq 0) = 0$$

$X_1(\omega), X_2(\omega), \dots$ が 0 に収斂しないとすれば適当な部分列

$\{X_{i_j}(\omega)\}$ を $a \neq 0$ に収斂させることが出来る。

数数列 y_1, y_2, \dots の概収斂する部分列をとれば、その極限は α であるが、

$$x(\omega) = \alpha \neq 0$$

だから $\omega \in E$

$P(E) = 0$ だから x_1, x_2, \dots は 0 に概収斂する。

(定理 3. は 共立社、近代数学全集 河田政美著、確率論参照)